



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36

MSC 2010: 93D15, 93D20, 93D30

Об управлении двухзвенным манипулятором с упругими шарнирами

А. С. Андреев, О. А. Перегудова

В статье решена задача о стабилизации программного движения двухзвенного манипулятора с упругими сочленениями. Абсолютно жесткие звенья манипулятора соединены между собой упругим цилиндрическим шарниром, и с помощью такого же шарнира первое звено крепится к основанию. Таким образом, манипулятор может совершать движения только в вертикальной плоскости. Движения манипулятора описываются системой уравнений Лагранжа второго рода. Задача синтеза управления движением такой системы заключается в построении законов изменения управляющих моментов, позволяющих манипулятору осуществлять заданное программное движение в реальных условиях действия внешних и внутренних возмущений и неточности математической модели. В работе построена математическая модель управляемого движения манипулятора для случая управляющих воздействий в виде непрерывных функций. С использованием вектор-функции Ляпунова и системы сравнения на основе каскадного расщепления системы получены условия, при которых построенный закон управления решает задачу о стабилизации программного движения манипулятора. Новизна результатов состоит в решении задачи стабилизации в нестационарной и нелинейной постановке, без перехода к линеаризованной модели. Построены графики для координат и скоростей звеньев манипулятора, подтверждающие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: многозвенный манипулятор, упругие шарниры, стабилизация, программное движение, система сравнения, вектор-функция Ляпунова

Получено 16 декабря 2014 года

После доработки 19 января 2015 года

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-33082, 15-01-08482).

Андреев Александр Сергеевич

AndreevAS@ulsu.ru

Перегудова Ольга Алексеевна

peregudovaoa@sv.ulsu.ru

Ульяновский государственный университет

432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42

Введение

Задачи синтеза управления многозвенными манипуляторами с упругими сочленениями являются в настоящее время предметом исследований многих авторов [4–9]. В соединительных элементах звеньев таких механических систем используются кабели, волновые приводы, ремни трансмиссии. Упругие элементы широко применяются в конструировании роботов, имитирующих физические функции человека. Задачи управления роботами-манипуляторами могут состоять, например, в выводе руки робота на заданную траекторию и обеспечении стабилизации движения вдоль этой траектории, а также в стабилизации руки в некотором фиксированном положении — позиционирование схвата. Управление манипулятором с абсолютно жесткими звеньями и шарнирами обеспечивается при использовании следующих основных подходов [8]: 1) построение ПД-регулятора, 2) построение управления на основе прямой и обратной связи (такое управление состоит из суммы программного управления и ПД-регулятора), 3) управление по обратной связи с линеаризацией (такое управление содержит моменты всех сил, действующих на систему, слагаемое, представляющее собой произведение матрицы инерции манипулятора на программное ускорение, и ПД-регулятор, что позволяет получить линейную стационарную систему в отклонениях от программного движения манипулятора, являющуюся асимптотически устойчивой; подход к построению данного управления часто в литературе называется методом вычисляемого момента), 4) построение релейного управления с использованием свойств скользящего режима, 5) построение нелинейного управления с использованием метода функций Ляпунова.

Хорошо известно, что манипулятор с упругими соединениями — это такая модель, в которой число входных и выходных сигналов намного меньше, чем число механических степеней свободы. Это говорит о том, что синтез системы управления манипулятором с упругими шарнирами является более трудным, чем для роботов с жесткими шарнирами. Управление такими моделями представляет собой сложную проблему из-за высокого порядка системы, ее нелинейности и многосвязности. Тем не менее, в ряде работ было обосновано применение указанных выше второго и третьего подходов для таких систем [6, 7, 9].

Одно из примечательных свойств модели многозвеного манипулятора с упругими шарнирами является ее каскадная структура. В работе [4] дан сравнительный анализ трех подходов к решению задачи глобального слежения для манипуляторов с упругими сочленениями: на основе каскадной декомпозиции системы и использования свойства устойчивости системы, состоящей из каскадного соединения устойчивых подсистем с ограниченными траекториями; на основе использования процедуры бэкстеппинга для каскадного соединения подсистем; с использованием свойства пассивности для стабилизации лагранжевых систем. Для обоснования найденных законов управления в работе [4] использовались скалярные функции Ляпунова квадратичного характера.

В настоящей статье с использованием вектор-функции Ляпунова и метода сравнения [2], а также результатов работы [1] на основе каскадной декомпозиции системы дано новое решение задачи синтеза управления движением двухзвеного манипулятора с упругими шарнирами, обеспечивающего стабилизацию программного движения, с учетом нелинейности и нестационарности системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель двухзвеного манипулятора (см. рис. 1), состоящую из неподвижного основания, двух абсолютно жестких звеньев G_1 , G_2 и двух упругих цилиндрических шарниров O_1 , O_2 . Оба звена могут совершать движения только в верти-

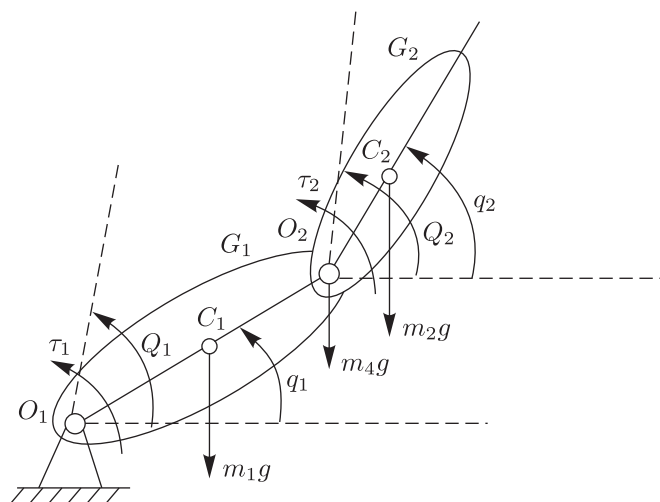


Рис. 1. Модель двухзвенного манипулятора с упругими шарнирами.

кальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2 . Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2 .

Введем обозначения: q_i — угол между горизонтальной осью и прямой O_iC_i ; l_{gi} — длина отрезка O_iC_i ; l_1 — длина отрезка O_2C_2 ; m_i — масса звена G_i ; I_i — момент инерции звена G_i относительно оси шарнира O_i ; Q_i — угол поворота ротора электродвигателя относительно горизонтальной оси; J_i — момент инерции ротора электродвигателя относительно оси O_i ; m_4 — масса ротора в точке O_2 ; g — ускорение свободного падения.

Выражение для кинетической энергии манипулятора имеет вид

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{g2} \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} m_4 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{Q}_2^2.$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = M_1 + k_1(Q_1 - q_1), & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = M_2 + k_2(Q_2 - q_2), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_1} \right) = -k_1(Q_1 - q_1) + \tau_1, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_2} \right) = -k_2(Q_2 - q_2) + \tau_2, \end{cases}$$

где M_i — момент, создаваемый силой тяжести в i -м шарнире, $M_1 = -(m_1 l_{g1} + (m_2 + m_4) l_1) \times g \cos q_1$, $M_2 = -m_2 l_{g2} g \cos q_2$, $K = \text{diag}\{k_1, k_2\} > 0$ — матрица коэффициентов жесткости шарниров, τ_i — управляющие воздействия.

Из выражения для кинетической энергии T находим уравнения движения манипулятора:

$$\begin{cases} (I_1 + (m_2 + m_4) l_1^2) \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{g2} \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_{g2} \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 = \\ = -(m_1 l_{g1} + (m_2 + m_4) l_1) g \cos q_1 + k_1(Q_1 - q_1), \\ I_2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{g2} \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{g2} \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 = -m_2 l_{g2} g \cos q_2 + k_2(Q_2 - q_2), \\ J_1 \ddot{Q}_1 + k_1(Q_1 - q_1) = \tau_1, \quad J_2 \ddot{Q}_2 + k_2(Q_2 - q_2) = \tau_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Пусть $q = (q_1, q_2)'$ — вектор угловых координат звеньев рассматриваемой механической системы и $X = \{q^0(t): [t_0, +\infty) \rightarrow R^2, \|q^0(t)\| \leq g_0, \|\dot{q}^0(t)\| \leq g_1, \|\ddot{q}^0(t)\| \leq g_2\}$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$ (g_0, g_1, g_2 — некоторые положительные постоянные). Символом $\|\bullet\|$ обозначена евклидова норма вектора. Штрих означает операцию транспонирования.

Пусть $q^0(t) \in X$ — какое-либо желаемое движение манипулятора. Обозначим

$$\begin{aligned} Q^0(t) &= (Q_1^0(t), Q_2^0(t))^T, \\ Q_1^0(t) &= \frac{1}{k_1} [(I_1 + (m_2 + m_4)l_1^2) \ddot{q}_1^0(t) + m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t)) \ddot{q}_2^0(t) - \\ &\quad - m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t)) (\dot{q}_2^0(t))^2 + (m_1 l_{g_1} + (m_2 + m_4)l_1) g \cos q_1^0(t)] + q_1^0(t), \\ Q_2^0(t) &= \frac{1}{k_2} [I_2 \ddot{q}_2^0(t) + m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t)) \ddot{q}_1^0(t) + \\ &\quad + m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t)) (\dot{q}_1^0(t))^2 + m_2 l_{g_2} g \cos q_2^0(t)] + q_2^0(t). \end{aligned}$$

Введем возмущения

$$x = q - q^0(t), \quad \dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^0(t), \quad y = Q - Q^0(t), \quad \dot{y} = \dot{Q} - \dot{Q}^0(t)$$

и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде

$$\begin{cases} A^{(1)}(t, x) \ddot{x} = \{\dot{x}' C^{(1)}(t, x) \dot{x}\} + R^{(1)}(t, x) + R^{(2)}(t, x, \dot{x}) - Kx + Ky, \\ A^{(2)} \ddot{y} + Ky - Kx = U^{(1)}, \end{cases} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} A^{(1)}(t, x) &= \begin{pmatrix} I_1 + (m_2 + m_4)l_1^2 & m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \\ m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & I_2 \end{pmatrix}, \\ C^{(1)}(t, x) &= \left(C_{(1)}^{(1)}(t, x), C_{(2)}^{(1)}(t, x) \right), \quad R^{(1)}(t, x) = F(t, x)p(x), \quad R^{(2)}(t, x, \dot{x}) = D(t, x)\dot{x}, \\ C_{(1)}^{(1)}(t, x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \end{pmatrix}, \\ C_{(2)}^{(1)}(t, x) &= \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F(t, x) &= \begin{pmatrix} f_{11}(t, x) & f_{12}(t, x) \\ f_{21}(t, x) & f_{22}(t, x) \end{pmatrix}, \quad p(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1/2) \\ \sin(x_2/2) \end{pmatrix}, \\ D(t, x) &= \begin{pmatrix} 0 & c_{22(1)}^{(1)}(t, x) \dot{q}_2^0(t) \\ c_{11(2)}^{(1)}(t, x) \dot{q}_1^0(t) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(t, x) &= 2m_2 l_1 l_{g_2} \cos(x_2/2) (\ddot{q}_2^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) - \\
&\quad - (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2)) - 2g(m_1 l_{g_2} + (m_2 + m_4) l_1) \sin(q_1^0(t) + x_1/2), \\
f_{12}(t, x) &= -2m_2 l_1 l_{g_2} \cos(x_1/2) (\ddot{q}_2^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) + \\
&\quad + (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2)), \\
f_{21}(t, x) &= 2m_2 l_1 l_{g_2} \cos(x_2/2) (\ddot{q}_1^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) + \\
&\quad + (\dot{q}_1^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2)), \\
f_{22}(t, x) &= -2m_2 l_1 l_{g_2} \cos(x_1/2) (\ddot{q}_1^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) - \\
&\quad - (\dot{q}_1^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2)) - 2gm_2 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) + x_2/2), \\
A^{(2)} &= \text{diag}\{J_1, J_2\}, \quad K = \text{diag}\{k_1, k_2\}, \\
U^{(1)} &= U - A^{(2)} \ddot{Q}^0(t) - K(Q^0(t) - q^0(t)), \quad U = (\tau_1, \tau_2)'.
\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $U^{(1)} = U^{(1)}(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})$, при котором невозмущенное движение $\dot{x} = x = y = \dot{y} = 0$ системы (1.2) было бы равномерно асимптотически устойчиво. Решение поставленной задачи будет означать стабилизацию заданного программного движения $q^0(t) \in X$ манипулятора.

2. Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора

Для решения задачи о стабилизации невозмущенного движения $\dot{x} = x = y = \dot{y} = 0$ системы (1.2) будем применять процедуру метода бэкстеппинга [3] для синтеза управления каскадными нелинейными системами. Для этого рассмотрим вначале первую подсистему (1.2)

$$A^{(1)}(t, x) \ddot{x} = \left\{ \dot{x}' C^{(1)}(t, x) \dot{x} \right\} + R^{(1)}(t, x) + R^{(2)}(t, x, \dot{x}) - Kx + Ky. \quad (2.1)$$

В системе (2.1) в качестве фиктивного управления выступает вектор y , который является вектором состояния второй подсистемы (1.2). Рассмотрим решение задачи стабилизации системы (2.1) в области

$$G = \{(x, \dot{x}) \in R^4: \|x\| < \varepsilon, \|\dot{x}\| < \varepsilon, \varepsilon = \text{const} > 0\}$$

с помощью непрерывного закона управления $y = \varphi(x, \dot{x})$ вида

$$\varphi(x, \dot{x}) = B(\dot{x} + p(x)) + x, \quad (2.2)$$

где $B \in R^{2 \times 2}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению.

Возьмем для системы (2.1) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с компонентами вида

$$V^1 = \|p(x)\|, \quad V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))' A^{(1)}(t, x) (\dot{x} + p(x))}.$$

Вычисляя производную по времени в силу системы (2.1) функций $(V^1(x))^2$ и $(V^2(t, x, \dot{x}))^2$, получим

$$2V^1 \dot{V}^1 = 2p' \dot{p} = 2p' \frac{\partial p}{\partial x} \dot{x} = -2p' \frac{\partial p}{\partial x} p + 2p' \frac{\partial p}{\partial x} (\dot{x} + p),$$

$$\begin{aligned}
2V^2\dot{V}^2 &= 2(\ddot{x} + \dot{p})'A^{(1)}(\dot{x} + p) + (\dot{x} + p)'\dot{A}^{(1)}(\dot{x} + p) = \\
&= 2[(A^{(1)})^{-1}(\{\dot{x}'C^{(1)}\dot{x}\} + Fp + D\dot{x} + KB(\dot{x} + p))]'A^{(1)}(\dot{x} + p) + \\
&+ 2\dot{x}'\frac{\partial p}{\partial x}A^{(1)}(\dot{x} + p) + (\dot{x} + p)'\dot{A}^{(1)}(\dot{x} + p) = \\
&= 2\{\dot{x}'C^{(1)}\dot{x}\}'(\dot{x} + p) + 2p'(F' + KB)(\dot{x} + p) + 2\dot{x}'(D' + KB)(\dot{x} + p) + \\
&+ 2\dot{x}'\frac{\partial p}{\partial x}A^{(1)}(\dot{x} + p) + (\dot{x} + p)'\dot{A}^{(1)}(\dot{x} + p) = \\
&= 2\{(\dot{x} + p)'C^{(1)}(\dot{x} + p)\}'(\dot{x} + p) - 2\{p'C^{(1)}p\}'(\dot{x} + p) - \\
&- 4\{p'C^{(1)}(\dot{x} + p)\}'(\dot{x} + p) + 2p'(F - D)'(\dot{x} + p) + 2(\dot{x} + p)'(D' + KB)(\dot{x} + p) + \\
&+ 2(\dot{x} + p)'\frac{\partial p}{\partial x}A^{(1)}(\dot{x} + p) - 2p'\frac{\partial p}{\partial x}A^{(1)}(\dot{x} + p) + \\
&+ (\dot{x} + p)'\left(\sum_{i=1}^2 \dot{q}_i^0(t)\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^2 (\dot{x}_i + p_i)\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^2 p_i\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i}\right)(\dot{x} + p) = \\
&= 2(\dot{x} + p)'\left(\{(\dot{x} + p)'C^{(1)}(\dot{x} + p)\} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 (\dot{x}_i + p_i)\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i}(\dot{x} + p)\right) + \\
&+ 2(\dot{x} + p)'\left(-\{p'C^{(1)}p\} + (F - D)p - A^{(1)}\frac{\partial p}{\partial x}p\right) + \\
&+ 2(\dot{x} + p)'\left(D' + KB + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 \dot{q}_i^0(t)\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x}A^{(1)}\right)(\dot{x} + p) + \\
&+ 2(\dot{x} + p)'\left(-2\{p'C^{(1)}(\dot{x} + p)\} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 p_i\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i}(\dot{x} + p)\right).
\end{aligned}$$

Получим оценки для составляющих производных по времени в силу системы (2.1) функций $(V^1(x))^2$ и $(V^2(t, x, \dot{x}))^2$ в области

$$R^+ \times G = \{(t, x, \dot{x}) \in R^+ \times R^2 \times R^2 : t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon, \varepsilon = \text{const} > 0\}.$$

Будем иметь следующие оценки:

$$\begin{aligned}
-p'\frac{\partial p}{\partial x}p &\leq -\mu_1\|p\|^2, \quad p'\frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x} + p) \leq m_1\|p\|\|\dot{x} + p\|, \\
\left\|-\{p'C^{(1)}p\} + (F - D)p - A^{(1)}\frac{\partial p}{\partial x}p\right\| &\leq \lambda_1(m_2\|p\| + m_3\|p\|^2), \\
\left\|\{(\dot{x} + p)'C^{(1)}(\dot{x} + p)\} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 (\dot{x}_i + p_i)\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i}(\dot{x} + p)\right\| &\leq m_4\lambda_1\|\dot{x} + p\|^2, \\
\left\|-2\{p'C^{(1)}(\dot{x} + p)\} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 p_i\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i}(\dot{x} + p)\right\| &\leq \lambda_1 m_5\|p\|\|\dot{x} + p\|, \\
\lambda_{\max}\left(D + D' + B'K + KB + \sum_{i=1}^2 \dot{q}_i^0(t)\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x}A^{(1)} + A^{(1)}\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= \\
= \lambda_{\max}\left(B'K + KB + \frac{\partial p}{\partial x}A^{(1)} + A^{(1)}\frac{\partial p}{\partial x}\right) &\leq -2\mu_2\lambda_2,
\end{aligned}$$

где положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2, m_i$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) определяются из условий

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 &= \min_{t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon} \lambda_{\min}(A^{(1)}) = \\ &= \frac{I_1 + (m_2 + m_4)l_1^2 + I_2 - \sqrt{(I_1 + (m_2 + m_4)l_1^2 - I_2)^2 + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2 \max_{t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon} \cos^2(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1)}}{2}, \\ \lambda_2^2 &= \max_{t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon} \lambda_{\max}(A^{(1)}) = \\ &= \frac{I_1 + (m_2 + m_4)l_1^2 + I_2 + \sqrt{(I_1 + (m_2 + m_4)l_1^2 - I_2)^2 + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2 \max_{t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon} \cos^2(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1)}}{2}, \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{\lambda_2^2 + 2 \max_{t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon} \sqrt{\lambda_{\max}[(F - D)'(F - D)]}}{2\lambda_1}, \\ m_3 &= \frac{m_2 l_1 l_{g_2} \max_{t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon} |\sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1)|}{\lambda_1}, \quad m_4 = 2m_3, \quad m_5 = 3m_3, \\ \mu_2 &= -\frac{\lambda_{\max}(KB + B'K)}{2\lambda_2} - \max_{t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon} \frac{(I_1 + (m_2 + m_4)l_1^2) \cos \frac{x_1}{2} + I_2 \cos \frac{x_2}{2}}{4\lambda_2} - \\ &\quad - \max_{t \geq 0, \|x\| \leq \varepsilon} \frac{\sqrt{\left[\left((I_1 + (m_2 + m_4)l_1^2) \cos \frac{x_1}{2} - I_2 \cos \frac{x_2}{2} \right)^2 + \right.}}{4\lambda_2} \\ &\quad \left. + (m_2 l_1 l_{g_2})^2 \cos^2(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \left(\cos \frac{x_1}{2} + \cos \frac{x_2}{2} \right)^2 \right]}{4\lambda_2}.\end{aligned}$$

Здесь $\lambda_{\max}(\cdot)$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы.

Отсюда для производной по времени вектор-функции Ляпунова V , в силу системы (2.1), получим следующие оценки:

$$\dot{V}^1 \leq -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} V^2, \quad \dot{V}^2 \leq m_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 (V^1)^2 + m_4 (V^2)^2 + m_5 V^1 V^2.$$

Тогда для системы (2.1) можно построить следующую систему сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} u^2, \quad \dot{u}^2 = m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3 (u^1)^2 + m_4 (u^2)^2 + m_5 u^1 u^2. \quad (2.3)$$

Согласно теореме сравнения об асимптотической устойчивости [2], из свойства асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения (2.3) следует свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1). Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.3) с областью притяжения $\{(u^1, u^2) \in R^2: 0 \leq u^1 \leq \delta_1 = \text{const} > 0, 0 \leq u^2 \leq \delta_2 = \text{const} > 0\}$. Пусть найдется такое число $\gamma > 0$, что выполняются соотношения

$$\gamma = \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1} < 1, \quad \mu_2 > \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1} (m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1. \quad (2.4)$$

Тогда можно показать, что функция $\tilde{u}(t) = \max\{u^1(t), \delta_1 u^2(t)/\delta_2\}$ будет монотонно стремиться к нулю при $t \rightarrow +\infty$, и, значит, нулевое решение системы сравнения (2.3) будет асимптотически устойчиво.

Далее, согласно процедуре бэкстеппинга, сделаем в системе (1.2) замену переменных $z = y - B(\dot{x} + p(x)) - x$; тогда система (1.2) примет вид

$$\begin{cases} A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = \{\dot{x}'C^{(1)}(t, x)\dot{x}\} + R^{(1)}(t, x) + R^{(2)}(t, x, \dot{x}) + KB(\dot{x} + p(x)) + Kz, \\ A^{(2)}\ddot{z} + Kz + A^{(2)}\ddot{\varphi} + K\varphi = U^{(1)}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Смысл перехода от системы (1.2) к системе (2.5) состоит в том, что первая подсистема системы (2.5) будет иметь асимптотически устойчивое нулевое положение равновесия $x = \dot{x} = 0$ при нулевом входе $z = 0$.

Для системы (2.5) возьмем управление $U^{(1.1)}$ в виде

$$U^{(1)} = A^{(2)}\ddot{\varphi} + L\dot{\varphi} + K\varphi - L\dot{y}, \quad (2.6)$$

где $L = lE > 0$ — диагональная матрица (E есть единичная матрица, $l = \text{const} > 0$). Тогда система (2.5) с управлением (2.6) примет вид

$$\begin{cases} A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = \{\dot{x}'C^{(1)}(t, x)\dot{x}\} + R^{(1)}(t, x) + R^{(2)}(t, x, \dot{x}) + KB(\dot{x} + p(x)) + Kz, \\ A^{(2)}\ddot{z} + L\dot{z} + Kz = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Система (2.7) состоит из каскадного соединения двух асимптотически устойчивых подсистем. Несложно показать, что нулевое решение $x = \dot{x} = z = \dot{z} = 0$ системы (2.7) будет асимптотически устойчиво. Для этого возьмем композитную вектор-функцию Ляпунова $V_c = (V^1, V^2, V^3, V^4)'$ для системы (2.7) в виде

$$V^1 = \|p(x)\|, \quad V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))'A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + p(x))}, \quad V^3 = \|\dot{z}\|, \quad V^4 = \|\dot{z} + \alpha z\|,$$

где $\alpha = \text{const} > 0$.

Вычисляя производную по времени вектор-функции Ляпунова V_c , в силу системы (2.7) будем иметь следующие оценки:

$$\begin{aligned} \dot{V}^1 &\leq -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} V^2, & \dot{V}^2 &\leq m_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 (V^1)^2 + m_4 (V^2)^2 + m_5 V^1 V^2 + m_6 V^3 V^2, \\ \dot{V}^3 &\leq -\alpha V^3 + V^4, & \dot{V}^4 &\leq m_7 V^3 - \mu_3 V^4, \end{aligned}$$

где положительные постоянные μ_3, m_i ($i = 6, 7$) определяются из условий

$$\mu_3 = \min \left\{ \alpha, \frac{l}{\max\{J_1, J_2\}} - \alpha \right\}, \quad m_6 = \frac{\max\{k_1, k_2\}}{\lambda_1}, \quad m_7 = -\alpha^2 + \alpha \frac{l}{\min\{J_1, J_2\}} - \min_{i=1,2} \frac{k_i}{J_i}.$$

Тогда для системы (2.7) можно построить следующую систему сравнения:

$$\begin{aligned} \dot{u}^1 &= -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} u^2, & \dot{u}^2 &= m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3 (u^1)^2 + m_4 (u^2)^2 + m_5 u^1 u^2 + m_6 u^3 u^2, \\ \dot{u}^3 &= -\alpha u^3 + u^4, & \dot{u}^4 &= m_7 u^3 - \mu_3 u^4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.8) с областью притяжения $\{(u^1, u^2, u^3, u^4)' \in R^4: 0 \leq u^i \leq \delta_i = \text{const} > 0, i = 1, \dots, 3\}$. Пусть число $\alpha > 0$ такое, что

$$2\alpha = \frac{l}{\min\{J_1, J_2\}} - \sqrt{\left(\frac{l}{\min\{J_1, J_2\}}\right)^2 - 4\left(\min_{i=1,2} \frac{k_i}{J_i} - 1\right)}, \quad (2.9)$$

и найдется такое число $\gamma > 0$, что выполняются соотношения

$$\gamma = \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1} < 1, \quad \mu_2 > \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1} (m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1 + m_6 \delta_3. \quad (2.10)$$

Тогда нулевое решение системы сравнения (2.9) будет асимптотически устойчиво.

Таким образом, управление

$$U = K(Q^0(t) - q^0(t)) + A^{(2)}(\ddot{Q}^0(t) - \ddot{\varphi}) - L\dot{\varphi} - K\varphi + L(\dot{Q} - \dot{Q}^0(t)), \quad (2.11)$$

$$\varphi(x, \dot{x}) = B(\dot{x} + p(x)) + x$$

решает задачу стабилизации программного движения $q^0(t) \in X$ манипулятора (1.1) при условиях (2.9), (2.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Реализация закона (2.11) требует измерения угловых координат и скоростей звеньев манипулятора, а также оценки угловых ускорений звеньев, первых производных по времени этих ускорений и угловых скоростей роторов двигателей, которые можно получить с помощью наблюдателей [8]. Отметим, что необходимость оценки ускорений и их производных по времени для системы (1.1) возникает и при применении найденных ранее законов управления [4–9].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Найденный закон управления (2.11) отличается более простой структурой от нелинейных законов, предложенных в [4], решающих задачу глобального слежения. В (2.11) нелинейность имеется только в слагаемом с множителем $p(x)$. Управления, полученные в [4], основаны на линеаризации системы обратной связью и требуют вычисления на каждом шаге практической реализации моментов всех сил, действующих на систему.

Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (2.11) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории:

$$m_1 = 2 \text{ кг}, \quad m_2 = 1 \text{ кг}, \quad m_4 = 0.1 \text{ кг}, \quad l_1 = 0.5 \text{ м}, \quad l_2 = 0.5 \text{ м}, \quad l_{g1} = 0.25 \text{ м}, \quad l_{g2} = 0.3 \text{ м},$$

$$I_1 = 0.167 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_2 = 0.083 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_1 = J_2 = 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad k_1 = k_2 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$q_1^0(t) = \sin(0.5t) \text{ рад}, \quad q_2^0(t) = \cos(0.5t) + \pi/2 \text{ рад}.$$

Матрица коэффициентов усиления в (2.11) была найдена в виде $B = 50E$. Время интегрирования составило 10 с.

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования при управлении (2.11). Пунктирной линией обозначены графики программного движения звеньев, а сплошной — графики движения звеньев при управлении (2.11).

Заключение

В статье получены следующие основные результаты.

1. Решена задача стабилизации программного движения двухзвенного манипулятора с упругими сочленениями в нелинейной и нестационарной постановке.
2. Обоснована методика построения вектор-функций Ляпунова и системы сравнения для систем, описывающих управляемое движение многозвенных манипуляторов с упругими сочленениями.
3. Проведено численное моделирование, подтверждающее полученные теоретические результаты.

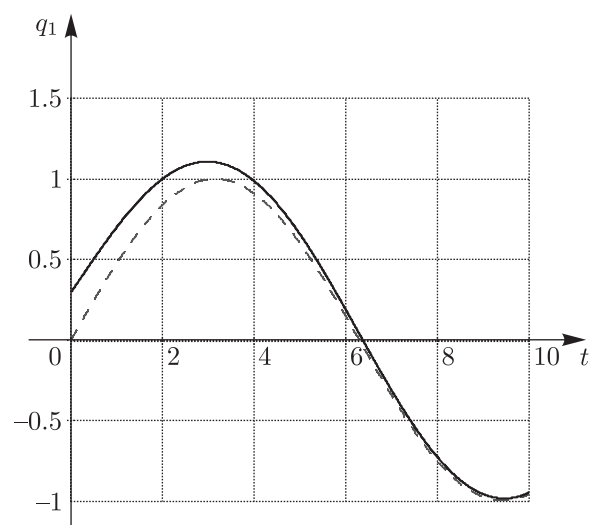


Рис. 2. Зависимость от времени угловой координаты первого звена при управлении (2.11).

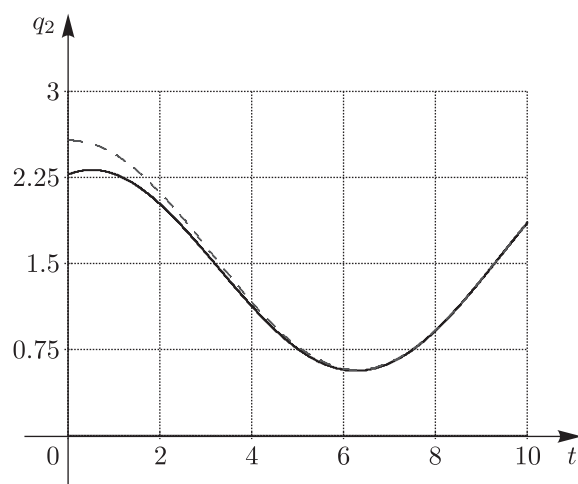


Рис. 3. Зависимость от времени угловой координаты второго звена при управлении (2.11).

Список литературы

- [1] Андреев А. С., Перегудова О. А. О стабилизации программных движений голономной механической системы // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН). Москва: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 1840–1843.
- [2] Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: Анализ динамических свойств нелинейных систем. Москва: Физматлит, 2001. 380 с.
- [3] Халил Х. К. Нелинейные системы. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 832 с.
- [4] Brogliato B., Ortega R., Lozano R. Global tracking controllers for flexible-joint manipulators: A comparative study // Automatica, 1995, vol. 31, no. 7, pp. 941–956.
- [5] De Luca A. Dynamic control of robots with joint elasticity // Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (Philadelphia, Pa., 1988), pp. 152–158.

- [6] De Luca A. Feedforward/Feedback laws for the control of flexible robots // Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (San Francisco, Calif., 2000), pp. 233–240.
- [7] De Luca A., Siciliano B., Zollo L. PD control with on-line gravity compensation for robots with elastic joints: Theory and experiments // Automatica, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1809–1819.
- [8] Moberg S. On modeling and control of flexible manipulators. Linköping: Linköping Univ., 2007. 148 p.
- [9] Palli G., Melchiorri C., De Luca A. On the feedback linearization of robots with variable joint stiffness // IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (Pasadena, Calif., 2008), pp. 1753–1759.

On control for double-link manipulator with elastic joints

Aleksandr S. Andreev¹, Olga A. Peregodova²

^{1,2} Ulyanovsk State University

LeoTolstoi str. 42, Ulyanovsk, 432017, Russia

¹AndreevAS@ulsu.ru, ²peregodovaoa@sv.ulsu.ru

In the paper the problem on stabilization of program motion for two-link manipulator with elastic joints is solved. Absolutely rigid manipulator links are connected by elastic cylindrical joint and via the same one the first link is fixed to the base. Thus, the manipulator can perform motion in a vertical plane. Motions of the manipulator are described by the system of Lagrange equations of the second kind. The problem on synthesis of motion control of such a system consists in the construction of the laws of change of control moments that allow the manipulator to carry out a given program motion in real conditions of external and internal disturbances, inaccuracy of the model itself. In this paper the mathematical model of controlled motion of the manipulator is constructed for the case of the control actions in the form of continuous functions. Using vector Lyapunov functions and comparison systems on the base of the cascade decomposition of the system we justified the application of these control laws in the problem of stabilization of the program motion of the manipulator. The novelty of the results is to solve the problem of stabilization of nonstationary and nonlinear formulation, without going to the linearized model. The graphs for the coordinates and velocities of the manipulator links confirm the theoretical results.

MSC 2010: 93D15, 93D20, 93D30

Keywords: multi-link manipulator, elastic joint, stabilization, program motion, comparison system, Lyapunov vector-function

Received December 16, 2014, accepted January 19, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 267–277 (Russian)